ФИЗИКА

© А.И. ФИЛИППОВ, О.В. АХМЕТОВА, А.С. РОДИОНОВ
ArtRodionov@mail.ru, ahoksana@yandex.ru, ArtRodionov@mail.ru

УДК 550.361

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОСРЕДНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА В СКВАЖИНЕ

АННОТАЦИЯ. В статье показано, что нахождение нулевого коэффициента асимптотического разложения можно рассматривать как осреднение температурного поля по сечению скважины. Установлено, что в частных случаях асимптотическая и интегральная процедуры осреднения приводят к одинаковым результатам.

SUMMARY. Shown that finding a zero coefficient of the asymptotic expansion can be viewed as averaging the temperature field over the cross section well. Found that, in special cases, asymptotic and integral averaging procedure leads to identical results.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Асимптотическое осреднение, асимптотическое разложение, интегральное осреднение, нулевой коэффициент разложения, температура, труба постоянного сечения, турбулентный поток.

KEY WORDS. Asymptotic averaging, asymptotic expansion, the integral averaging, zero expansion coefficient, temperature, constant-section pipe, turbulent flow.

Задачи по определению осредненных по области значений физических параметров, например, определение средней температуры жидкости в трубе [1], концентрации радиоактивных примесей при фильтрации растворов в пористой среде [2] и т.д. могут быть успешно решены на основе асимптотических методов при специальном выборе формального параметра асимптотического разложения. При этом возникает необходимость построения нулевого и первого коэффициентов разложения, погранслойных функций и оценочных выражений для остаточного члена.

Ниже показано, что нулевой коэффициент разложения при этом описывает осредненные по сечению трубы значения физических параметров. В более сложных случаях нелинейных задач и задач с переменными коэффициентами построение нулевого коэффициента представляет оригинальную процедуру осреднения, которая, к сожалению, не может быть осуществлена на основе интегрального осреднения исходных уравнений.

Построение первого коэффициента разложения требует добавочных условий, которые получены на основе тривиального решения осредненной задачи для остаточного члена, и в этом смысле соответствующие выражения для нулевого и первого приближения названы «в среднем точными». Обоснование этого факта важно для концептуальной оценки близости искомого точного решения и асимптотического [3].

Выражение для первого коэффициента разложения позволяет определить «погрешность» осредненных значений физических параметров. Выражение для первого коэффициента на самом деле более детально описывают поля физических параметров в области осреднения. Кроме того, именно из этих выражений следуют стационарные решения задач, полученные при формальном устремлении времени к бесконечности. В этом смысле построение первого коэффициента разложения представляет важнейшую задачу определения стационарных решений ряда задач теории теплопроводности.

Математическая постановка задачи о температурном поле турбулентного потока жидкости в трубе постоянного сечения имеет вид

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \lambda_{1z} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z_{\mathrm{d}}^2} + \lambda_{1r} \frac{1}{r_{\mathrm{d}}} \frac{\partial}{\partial r_{\mathrm{d}}} \left(r_{\mathrm{d}} \frac{\partial \theta_1}{\partial r_{\mathrm{d}}} \right), \quad r_{\mathrm{d}} > r_0, \quad t > 0, \quad Z_d > 0,$$

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_{\mathrm{d}}^2} + \lambda_r \frac{1}{r_{\mathrm{d}}} \frac{\partial}{\partial r_{\mathrm{d}}} \left(r_{\mathrm{d}} \lambda_{\mathrm{td}}(r_{\mathrm{d}}) \frac{\partial \theta}{\partial r_{\mathrm{d}}} \right) - \rho c v(r) \frac{\partial \theta}{\partial z_{\mathrm{d}}} + q_{\mathrm{d}}, \; r_{\mathrm{d}} < r_0, \; t > 0,$$

$$z_{\mathrm{d}} > 0,$$

$$\theta \big|_{r_{\mathrm{d}} = r_0} = \theta_1 \big|_{r_{\mathrm{d}} = r_0},$$

$$\lambda_r \frac{\partial \theta}{\partial r_{\mathrm{d}}} \Big|_{r_{\mathrm{d}} = r_0} = \lambda_{1r} \frac{\partial \theta_1}{\partial r_{\mathrm{d}}} \Big|_{r_{\mathrm{d}} = r_0},$$

$$\theta \big|_{t=0} = \theta_1 \big|_{t=0} = \theta_{01} - \Gamma z_{\mathrm{d}},$$

$$\theta_1 \big|_{r_{\mathrm{d}} \to \infty} = \theta_{01} - \Gamma z_{\mathrm{d}},$$

$$\theta \big|_{z_{\mathrm{d}} = 0} = \theta_{10}(t).$$

Турбулентный профиль скорости определяется по следующей формуле: $R(r) = \dfrac{u}{v_0} \sqrt{\tau_0 / \rho}$, где u — решение уравнения Сполдинга $y = u + [\exp(\kappa u) - \varphi_4(u)]/E$, $\varphi_m(u) = \sum_{n=0}^{m} (\kappa u)^n / n!$. Величина τ_0/ρ получена из уравнения Кармана-Никурадзе $1/\sqrt{4f} = -0.8 + 0.87 \ln\left(\mathrm{Re}\sqrt{4f}\right)$, где $f = 2\tau_0\rho/v_0^2$, k = 0.407, E=10.

С использованием соотношений

$$r = r_{\mathrm{d}}/r_0, \; z = z_{\mathrm{d}}/D, \; \mathrm{H} = \eta \rho g r_0 / \nu \theta_0, \; \theta_0 = \Gamma D, \; \nu = r_0/D, \; \chi = c_1 \rho_1 / c\rho,$$

$$\mathrm{Fo} = a_{1r}t/r_0^2\,,\ T_1 = (\theta_1 - \theta_{01} + \Gamma z_\mathrm{d})/\theta_0\,,\ T = (\theta - \theta_{01} + \Gamma z_\mathrm{d})/\theta_0\,, \Lambda = \lambda_{r1}/\lambda_r\,,$$

$$\lambda(r) = \lambda_\mathrm{td}(r_\mathrm{d})/\lambda_r\,,\ \mathrm{Pe} = \mathrm{v}_0 r_0/a_{1r}\,,\ Q(r, z, \mathrm{Fo}) = r_0^2 q_\mathrm{d}/c\rho\theta_0 a_{1r}$$

исходная постановка приводится к безразмерному виду

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathrm{Fo}} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) = 0\,,\ r > 1\,,\ \mathrm{Fo} > 0\,,\ z > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathrm{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\lambda(r)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \mathrm{Pe}\nu R(r)\left(\frac{\partial T}{\partial z} - 1 + \mathrm{H}\right) - Q(r, z, \mathrm{Fo}) = 0\,,\ r < 1, \tag{2}$$

$$\mathrm{Fo} > 0\,,\ z > 0,$$

$$T\big|_{r=1} = T_1\big|_{r=1}\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=1} = \Lambda\frac{\partial T_1}{\partial r}\Big|_{r=1}\,, \tag{4}$$

$$T\big|_{\mathrm{Fo}=0} = T_1\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0\,, \tag{5}$$

$$T_1\big|_{r\to\infty} = 0, \tag{6}$$

$$T\big|_{z=0} = T_0(\mathrm{Fo}), \tag{7}$$

где $\lambda(r) = 1 + c\rho\kappa\nu[\exp(\kappa u) - \varphi_3(u)]/E\lambda_r$.

Здесь пренебрегается слагаемыми, содержащими множитель ν^2, так как он имеет порядок 10^{-8}. Задачу в постановке (1)—(7) называют сопряженной. Решение таких задач связано с принципиальными трудностями, поэтому задача в точной постановке заменяется многими исследователями более простой. Одним из способов упрощения задачи является ее осреднение по радиусу трубы. Для этого применяется следующий интеграл

$$\langle T\rangle = 2\int_0^1 T(r)r dr\ .$$

При осреднении второго слагаемого уравнения (2) используется соотношение, вычисляемое с помощью условия сопряжения (4)

$$2\int_0^1 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\lambda(r)\frac{\partial T}{\partial r}\right) r dr = 2\Lambda\frac{\partial T_1}{\partial r}\Big|_{r=1}\,.$$

Интегральное осреднение третьего слагаемого уравнения (2) затруднено ввиду наличия переменного коэффициента $R(r)$, определяемого режимом течения флюида в скважине, поскольку только в случае $R(r)$=1 интеграл $\int_0^1 R(r')T(r')r'dr'$ выражается через средние значения температур $\langle T\rangle$. Осредним задачу (1)—(7) в предположении $R(r)$=1, что соответствует выровненному профилю скорости

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathrm{Fo}} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) = 0,\ r > 1,\ \mathrm{Fo} > 0, z > 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial\,\mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}\nu\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial z} - 1 + \mathrm{H}\right) - 2Q_1(1, \mathrm{Fo}, z) = 2\chi\frac{\partial T_1}{\partial r}\Big|_{r=1},\ r < 1,\ \mathrm{Fo} > 0,\ z > 0, \tag{9}$$

$$\langle T\rangle = T_1\big|_{r=1}, \tag{10}$$

$$\langle T\rangle\big|_{\mathrm{Fo}=0} = T_1\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \tag{11}$$

$$T_1\big|_{r\to\infty} = 0, \tag{12}$$

$$\langle T\rangle\big|_{z=0} = T_0(\mathrm{Fo}). \tag{13}$$

С использованием преобразования

$$T_j^u = p\int_0^\infty e^{-pt}T_j(t)dt$$

задача (8)—(13) записывается в пространстве изображений

$$pT_1^u - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1^u}{\partial r}\right) = 0,\ r > 1,\ z > 0, \tag{14}$$

$$p\langle T\rangle^u + \mathrm{Pe}\nu\left(\frac{\partial\langle T\rangle^u}{\partial z} - 1 + \mathrm{H}\right) - 2Q^u(1, p, z) = 2\chi\frac{\partial T_1^u}{\partial r}\Big|_{r=1},\ r < 1,\ z > 0, \tag{15}$$

$$\langle T\rangle^u = T_1^u\big|_{r=1}, \tag{16}$$

$$T^u\big|_{r\to\infty} = 0, \tag{17}$$

$$\langle T\rangle^u\big|_{z=0} = T_0^u(p). \tag{18}$$

Точное решение задачи (14)—(18) внутри скважины в пространстве изображений имеет вид

$$\langle T\rangle^u = T_0^u(p)e^{-\alpha z} + \int_0^z \frac{\mathrm{Pe}\nu(1-\mathrm{H}) + Q^u(p,z)}{\mathrm{Pe}\nu}e^{-\alpha(z-\xi)}d\xi,\ r < 1,\ z > 0, \tag{19}$$

где $\alpha = \dfrac{p}{\mathrm{Pe}\nu} + \dfrac{2\chi}{\mathrm{Pe}\nu}\sqrt{p}k$.

Решение для внешней области представится в виде

$$T_1^u = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}\left[T_0^u(p)e^{-\alpha z} + \int_0^z \frac{\mathrm{Pe}\nu(1-\mathrm{H}) + Q^u(p,z)}{\mathrm{Pe}\nu}e^{-\alpha(z-\xi)}d\xi\right],\ r > 1,\ z > 0.$$

Выражение (19) после перехода в пространство оригиналов позволяет исследовать динамику средней по сечению температуры в скважине на различных глубинах в зависимости от размеров трубы, а также теплофизических свойств флюида и окружающих пород. Однако в некоторых случаях (фазовые переходы, турбулентные потоки и т.д.) исходная задача осложнена переменными коэффициентами или нелинейными уравнениями, что делает неприемлемой процедуру интегрального осреднения. Покажем, что в рассматриваемом случае поиск осредненного решения сводится к определению нулевого коэффициента асимптотического разложения. Параметризованная постановка задачи для выровненного профиля примет вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathrm{Fo}} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) = 0\,,\ r > 1,\ \mathrm{Fo} > 0\,,\ z > 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathrm{Fo}} - \frac{\chi}{\varepsilon\Lambda}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \mathrm{Pe}\nu\left(\frac{\partial T}{\partial z} - 1 + \mathrm{H}\right) - Q(r,z,\mathrm{Fo}) = 0,\ r < 1,\ \mathrm{Fo} > 0, \tag{21}$$

$$z > 0,$$

$$T\big|_{r=1} = T_1\big|_{r=1}\,, \tag{22}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=1} = \varepsilon\Lambda\frac{\partial T_1}{\partial r}\Big|_{r=1}\,, \tag{23}$$

$$T\big|_{\mathrm{Fo}=0} = T_1\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0\,, \tag{24}$$

$$T_1\big|_{r\to\infty} = 0\,, \tag{25}$$

$$T\big|_{z=0} = T_0(\mathrm{Fo}). \tag{26}$$

Решение параметризованной задачи целесообразно отыскивать в виде асимптотических формул

$$T_1 = T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \varepsilon^2 T_1^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n T_1^{(n)} + \Theta_1^{(n)}, \tag{27}$$

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n T^{(n)} + \Theta^{(n)}, \tag{28}$$

где ε формальный параметр разложения.

Подставляя T и T_1 из (27), (28) в (20)—(26) и выписывая слагаемые при ε^0, получим постановку задачи для нулевого коэффициента разложения

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \mathrm{Fo}} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\right) = 0\,, \tag{29}$$

$$\frac{\chi}{\Lambda}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}\right) = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}\nu\left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - 1 + \mathrm{H}\right) - Q(r,\mathrm{Fo},z), \tag{30}$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=1} = \Lambda\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\Big|_{r=1}\,, \tag{31}$$

$$T^{(0)} = T_1^{(0)}\Big|_{r=1}, \tag{32}$$

$$T^{(0)}\Big|_{\mathrm{Fo}=0} = T_1^{(0)}\Big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \tag{33}$$

$$T_1^{(0)}\Big|_{r\to\infty} = 0, \tag{34}$$

$$T^{(0)}\Big|_{z=0} = T_0(\mathrm{Fo}). \tag{35}$$

Уравнение (30) является «зацепленным» в том смысле, что содержит первый коэффициент разложения $T^{(1)}$. С использованием известной процедуры расцепления [4] задача приводится к виду

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \mathrm{Fo}} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\right) = 0,\ r > 1,\ \mathrm{Fo} > 0,\ z > 0, \tag{36}$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}\nu\left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - 1 + \mathrm{H}\right) - Q(r,\mathrm{Fo},z) = 2\chi\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\Big|_{r=1},\ r < 1,\ \mathrm{Fo} > 0,\ z > 0, \tag{37}$$

$$T^{(0)} = T_1^{(0)}\Big|_{r=1}, \tag{38}$$

$$T^{(0)}\Big|_{\mathrm{Fo}=0} = T_1^{(0)}\Big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \tag{39}$$

$$T_1^{(0)}\Big|_{r\to\infty} = 0, \tag{40}$$

$$T^{(0)}\Big|_{z=0} = T_0(\mathrm{Fo}). \tag{41}$$

Нетрудно убедиться, что постановка задачи после осреднения и постановка для нулевого приближения асимптотического разложения совпадают с точностью до обозначений. Из единственности решения соответствующих задач следует, что решения их совпадают

$$\langle T\rangle = T^{(0)}. \tag{42}$$

Равенство (42) позволяет установить физический смысл нулевого приближения. Оно констатирует, что решение в нулевом приближении соответствует отысканию осредненной по радиусу скважины температуры. Отсюда следует также, что предел решения при $\varepsilon\to 0$ соответствует усреднению искомого решения по координате r.

Так как в задаче (36)-(41) по оси r осуществлено осреднение, то естественно нулевое приближение не зависит от r и описывает средние значения температуры по сечению скважины. Первое приближение $T^{(1)}$ позволяет учесть зависимость температуры от радиальной координаты r внутри скважины, что обуславливает необходимость построения как нулевого, так и первого приближения исходной задачи. Еще раз подчеркнем, что в рассмотренном здесь случае процедура осреднения допускает как интегральное осреднение, так и построение нулевой асимптотической задачи, что обусловлено линейностью и постоянством коэффициентов входящих в нее уравнений.

В случае, когда $R(r) \neq \mathrm{const}$ задача для нулевого коэффициента разложения, как нетрудно убедиться подстановкой (27), (28) в (1) и (7), имеет вид:

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \mathrm{Fo}} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\right) = 0,\ r>1,\ \mathrm{Fo}>0,\ z>0, \tag{43}$$

$$\frac{\chi}{\Lambda}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(r)\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}\right) = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}\nu R(r)\left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - 1 + \mathrm{H}\right) - Q(r,\mathrm{Fo},z),\ r<1,$$
$$\mathrm{Fo}>0,\ z>0, \tag{44}$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=1} = \Lambda\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\Big|_{r=1}, \tag{45}$$

$$T^{(0)} = T_1^{(0)}\Big|_{r=1}, \tag{46}$$

$$T^{(0)}\Big|_{\mathrm{Fo}=0} = T_1^{(0)}\Big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \tag{47}$$

$$T_1^{(0)}\Big|_{r\to\infty} = 0, \tag{48}$$

$$T^{(0)}\Big|_{z=0} = T_0(\mathrm{Fo}). \tag{49}$$

После «расцепления» уравнения (44) задача (43)—(49) запишется как

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \mathrm{Fo}} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\right) = 0,\ r>1,\ \mathrm{Fo}>0,\ z>0,$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}\nu R_1(1)\left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - 1 + \mathrm{H}\right) - Q_1(1,\mathrm{Fo},z) = 2\chi\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\Big|_{r=1},\ r<1,\ \mathrm{Fo}>0,$$
$$z>0,$$

$$T^{(0)} = T_1^{(0)}\Big|_{r=1},$$

$$T^{(0)}\Big|_{\mathrm{Fo}=0} = T_1^{(0)}\Big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0,$$

$$T_1^{(0)}\Big|_{r\to\infty} = 0,$$

$$T^{(0)}\Big|_{z=0} = T_0(\mathrm{Fo}),$$

где $R_1(r) = \int_0^r r'R(r')dr'$, $Q_1(r,\mathrm{Fo},z) = \int_0^r r'Q(r',\mathrm{Fo},z)dr'$.

Точное решение задачи (43)—(49) внутри скважины в пространстве изображений примет вид

$$T^u = T_0^u(p)e^{-\alpha z} + \int_0^z \frac{\mathrm{Pe}\nu(1-\mathrm{H}) + Q^u(p,z)}{2R_1(1)\mathrm{Pe}\nu}e^{-\alpha(z-\xi)}d\xi,\ r<1,\ z>0, \tag{50}$$

где $R_1(1)=0.5$.

Выражение (50), представляющее точное решение задачи в нулевом приближении в пространстве изображений, совпадает с аналогичными выражениями для ламинарного и выровненного профилей скорости [3], [4] и описывает среднюю по сечению трубы температуру для осредненной задачи (8)—(13), т.е. при $R(r) \equiv 1$.

Таким образом, справедливо следующее ***утверждение***: *асимптотически осредненные температурные поля для ламинарного, турбулентного и выровненного профилей скорости совпадают,* или *нулевое приближение не зависит от режима течения.*

Итак, показано, что нулевой коэффициент асимптотического разложения описывает осредненное интегральное значение температуры по сечению скважины. В этом смысле разработанный алгоритм построения задачи для нулевого коэффициента разложения представляет некоторую универсальную процедуру асимптотического осреднения исходной задачи.

Важность асимптотического осреднения заключается в том, что оно проще реализуется даже в том случае, когда интегральная процедура осреднения неприемлема.

Список обозначений:

a_1 — коэффициент температуропроводности окружающей среды, м²/с;

c, c_1 — удельная теплоемкость флюида и окружающей среды соответственно, Дж/(К·кг);

D — глубина скважины, м;

Pe — аналог параметра Пекле;

r_d, z_d, и r, z — размерные и безразмерные цилиндрические координаты соответственно, м;

r_0 — радиус трубы, м;

$Q(r, z, \mathrm{Fo})$ — безразмерная функция источников;

q_d — плотность источников тепла, Вт/м³;

T — безразмерная температура флюида;

T_1 — безразмерная температура среды;

t, Fo — размерное и безразмерное время, с;

v — средняя скорость жидкости в трубе, м/с;

Γ — геотермический градиент, К/м;

ε — параметр асимптотического разложения;

η — адиабатический коэффициент К/Па;

θ, θ_1 -температура флюида и окружающей среды соответственно, К;

θ_{01} — естественная невозмущенная температура, К;

λ, λ_1 — коэффициент теплопроводности потока и окружающей среды, Вт/(м·К);

ρ, ρ_1 — плотность флюида и окружающей среды, кг/м³.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Ахметова О.В. Температурное поле в действующей скважине // Сибирский журнал индустриальной математики. 2004. Т. VII. №1(17). С. 135-144.

2. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Иванов Д.В. Температурное поле радиоактивных изотопов в пористой среде // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48. №1. С. 96-104.

3. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Горюнова М.А. Анализ температурного поля цилиндрического потока на основе «в среднем точного» решения // Прикладная математика и теоретическая физика. 2010. Т. 51. №3. С. 84-93.

4. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Горюнова М.А. Уточненное аналитическое решение основной задачи термокаротажа // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2008. Т.15. В5. С. 906-907.